© International Baccalaureate Organization 2023

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/.

© Organisation du Baccalauréat International 2023

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2023

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/.

Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación
Nivel Medio
Prueba 1

30 de octubre de 2023

Zona A tarde | **Zona B** tarde | **Zona C** tarde

Número de convocatoria del alumno

1 hora 30 minutos

Instrucciones para los alumnos

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Conteste todas las preguntas.
- Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[80 puntos]**.

8823 – 7224

19 páginas

© International Baccalaureate Organization 2023

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención. Por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 7]

Joel es un ciclista entusiasta que lleva un registro de su desempeño. La siguiente tabla muestra el tiempo (en minutos) que tarda en recorrer con la bicicleta un kilómetro, por colinas de distinta pendiente. La pendiente de cada colina es constante.

Pendiente G (%)	0	4	10	15	20
Tiempo T (min.)	2,11	5,39	10,56	13,20	18,58

(a) (i) Halle la ecuación de la recta de regresión de T sobre G.

(ii) Describa la correlación que existe entre T y G haciendo referencia al valor del coeficiente de correlación momento-producto de Pearson (r). [4]

El próximo sábado, Joel pretende subir con la bicicleta una colina que tiene una pendiente del 17%.

(b) Estime el tiempo que tardará Joel en recorrer un kilómetro de esa colina. [2]

Esta mañana, Joel recorrió con la bicicleta un kilómetro de una colina y tardó 22 minutos.

(c) Explique por qué no resultaría adecuado utilizar la ecuación que halló en el apartado (a) para estimar la pendiente de esta colina. [1]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 1: continuación)

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

2. [Puntuación máxima: 6]

La Gran Pirámide de Guiza es la más antigua de las Siete Maravillas del Mundo Antiguo. Cuando se construyó, hace 4500 años, las dimensiones de la pirámide se medían en codos reales egipcios (REC).

[Fuente: Nina Aldin Thune. https://en.wikipedia.org/wiki/Great_Pyramid_of_Giza#/media/File:Kheops-Pyramid.jpg. Bajo licencia CC BY 2.5 https://creativecommons.org/licenses/by/2.5/deed.es. Imagen adaptada.]

Viktor lee en Internet que $1\,\text{REC}$ es igual a $0{,}52$ metros, redondeando a dos cifras decimales.

(a) Escriba los límites superior e inferior de $1\,\text{REC}$ en metros. [2]

La Gran Pirámide de Guiza tiene base cuadrada, de $440\,\text{REC}$ de lado, y una altura de $280\,\text{REC}$. Viktor supone que estas dos medidas son exactas y que la Gran Pirámide se puede modelizar como una pirámide de base cuadrada y caras lisas.

(b) Halle, en metros cúbicos, el mínimo volumen posible de la pirámide. [4]

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

3. [Puntuación máxima: 6]

Considere el gráfico de la siguiente función:

$$g(x) = \frac{8}{x} + \frac{x^2}{2}, \text{ para } x \neq 0.$$

(a) Escriba la ecuación de la asíntota vertical de $g(x)$. [1]

(b) Halle $g'(x)$. [3]

(c) Escriba el intervalo en el que $g(x)$ es creciente. [2]

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

4. [Puntuación máxima: 8]

En el siguiente diagrama de Voronoi, las coordenadas de tres granjas son $\mathrm{A}(0, 3)$, $\mathrm{B}(8, 3)$ y $\mathrm{C}(8, 13)$, donde las distancias se miden en kilómetros. Cada granja posee los terrenos que están más cercanos de ella y sus límites están representados por las líneas de puntos del **diagrama 1**.

Diagrama 1

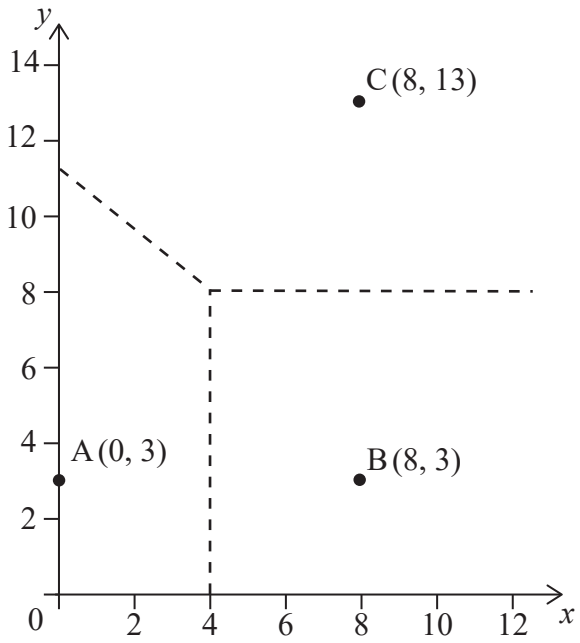
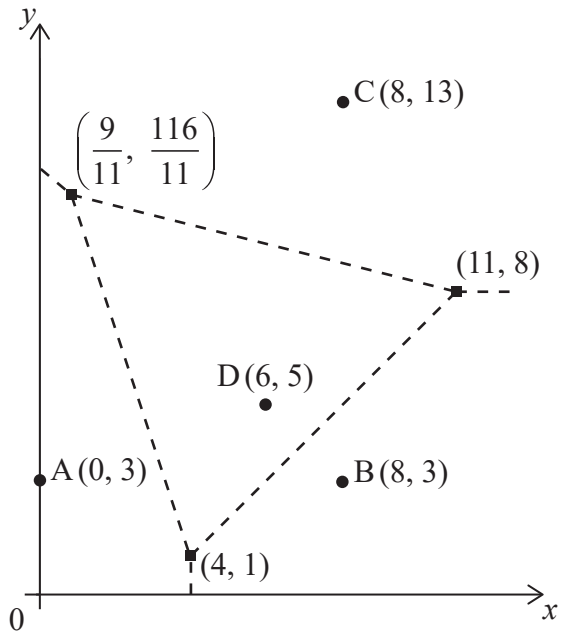


Diagrama 2



Para surtir de agua a las granjas se decide construir un pozo en el punto donde los límites coinciden en el **diagrama 1**.

(a) Escriba las coordenadas de este punto. [1]

(b) Halle la ecuación de la mediatriz de $[\mathrm{AC}]$. [3]

Se construye otra granja $\mathrm{D}(6, 5)$ en esos terrenos. Por ello, se ha vuelto a trazar el diagrama de Voronoi para mostrar los nuevos límites. Las coordenadas de los vértices de estos límites se indican en el **diagrama 2**.

Se va a construir una turbina eólica en uno de esos vértices.

(c) La turbina eólica debería estar lo más lejos posible de las granjas más cercanas.

(i) Calculando las distancias pertinentes, halle la ubicación de la turbina eólica.

(ii) A partir de lo anterior, escriba la distancia que hay entre la turbina eólica y la granja más cercana. [4]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 4: continuación)

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

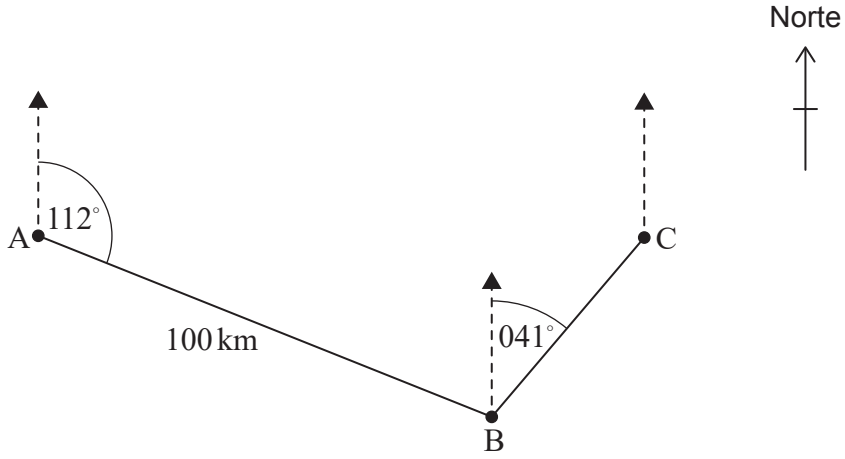
. . . . . .

. . . . . .

5. [Puntuación máxima: 6]

Jason navega con su barco desde el punto A una distancia de $100\,\text{km}$, con rumbo de 112°, para llegar al punto B. Luego navega con un rumbo de 041° hasta el punto C. El viaje de Jason se muestra en la siguiente figura.

la figura no está dibujada a escala



(a) Halle $\text{A}\hat{\text{B}}\text{C}$. [2]

El punto C está justo al este del punto A.

(b) Calcule la distancia que navega Jason para volver directamente del punto C al punto A. [4]

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

6. [Puntuación máxima: 4]

Considere la siguiente función:

$$h(x) = \frac{2}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{2}, \text{ para } x > 1.$$

(a) Halle $h^{-1}(1)$. [2]

(b) Halle el dominio de $h^{-1}(x)$. [2]

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

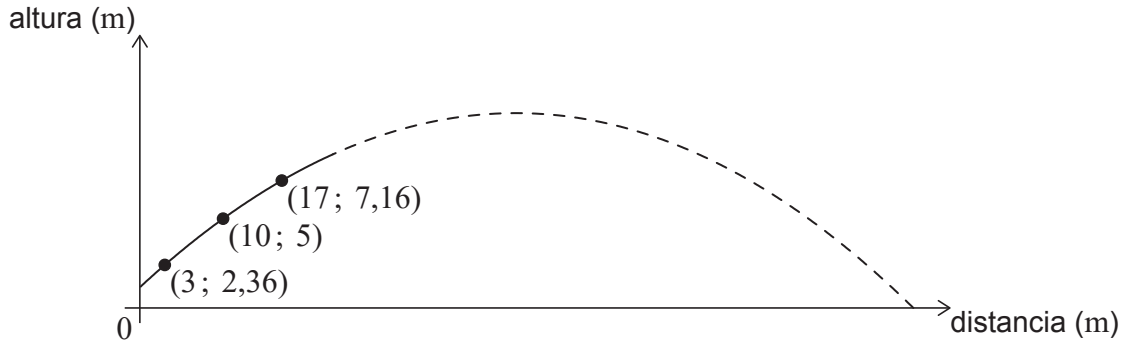
7. [Puntuación máxima: 9]

Un deportista, que está en un campo de deportes de forma horizontal, golpea una bola. La altura de la bola respecto al suelo (en metros) después del golpeo inicial se puede modelizar mediante una función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde x representa la distancia horizontal (en metros) que ha recorrido la bola respecto al jugador.

Una cámara especializada hace un seguimiento de la trayectoria inicial de la bola después de que el jugador la haya golpeado. La cámara detecta que la bola pasa por los tres puntos siguientes: $(3\,;\,2{,}36)$, $(10\,;\,5)$ y $(17\,;\,7{,}16)$, tal y como se muestra en la **figura 1**.

la figura no está dibujada a escala

Figura 1



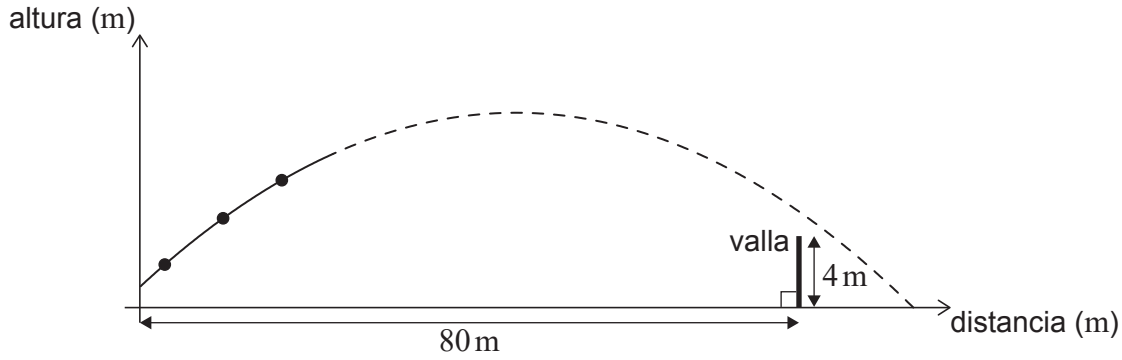
(a) Utilice las coordenadas $(3\,;\,2{,}36)$ para escribir una ecuación en función de a, b, y c. [1]

(b) Utilice su respuesta en el apartado (a) y dos ecuaciones similares para hallar la ecuación del modelo cuadrático que representa la altura de la bola. [3]

Hay una valla de 4 metros de altura que está a 80 metros del lugar donde el jugador golpeó la bola, tal y como se muestra en la **figura 2**.

la figura no está dibujada a escala

Figura 2



(c) Muestre que el modelo predice que la bola pasará por encima de la valla. [3]

(d) Halle la distancia horizontal que recorrerá la bola —desde la posición del jugador hasta que toca el suelo— según este modelo. [2]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 7: continuación)

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

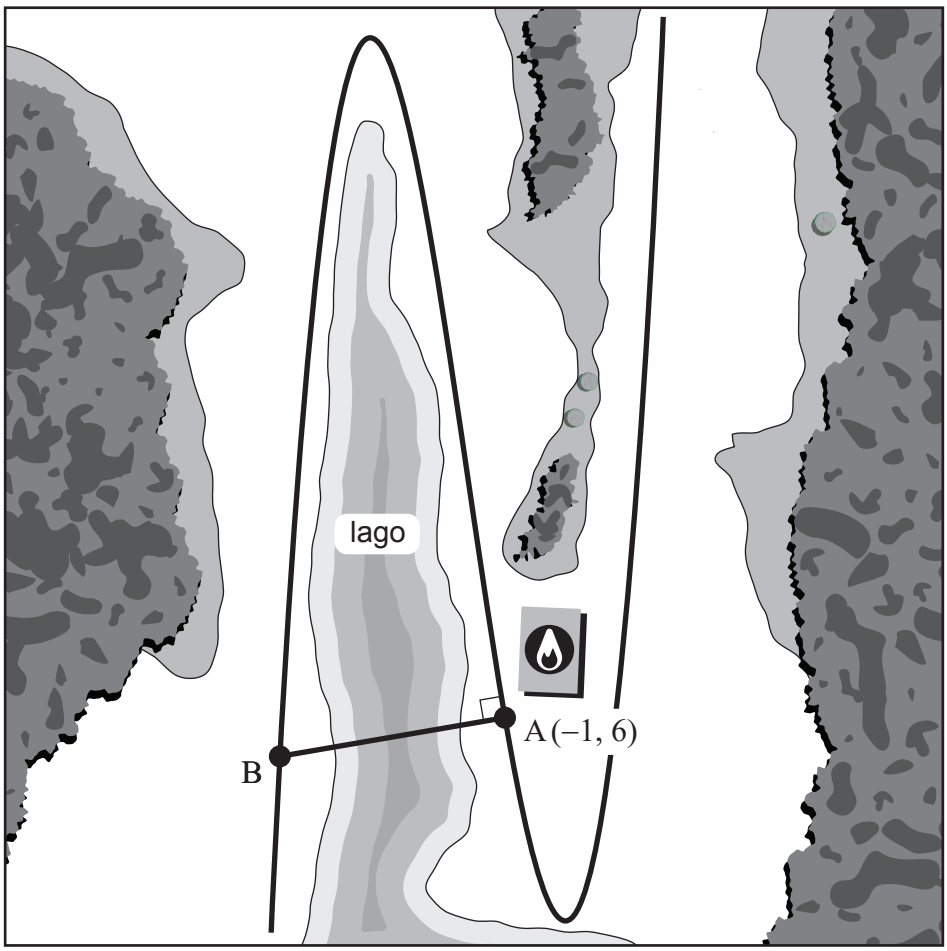
8. [Puntuación máxima: 7]

La siguiente figura representa un mapa que muestra una carretera llena de curvas que rodea un lago. La forma de la carretera se puede modelizar mediante la función $r(x) = (x + 1)^3 + 2x^2 - 4x$. En el mapa, todas las distancias se dan en kilómetros.

La estación de bomberos de la zona se encuentra en el punto A, cuyas coordenadas son $(-1, 6)$.

Para ahorrar tiempo en caso de emergencia, la comunidad local está planificando la construcción de un puente que cruce el lago. El puente se construirá de modo que sea normal a la carretera en el punto A y que conecte la estación de bomberos con el punto B.

la figura no está dibujada a escala



(a) Utilizando la calculadora de pantalla gráfica, halle el valor de $r'(-1)$. [2]

(b) Halle la ecuación de la recta normal a $r(x)$ en el punto A, que se puede utilizar para modelizar el nuevo puente. [2]

(c) A partir de lo anterior, determine la longitud del nuevo puente. [3]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 8: continuación)

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

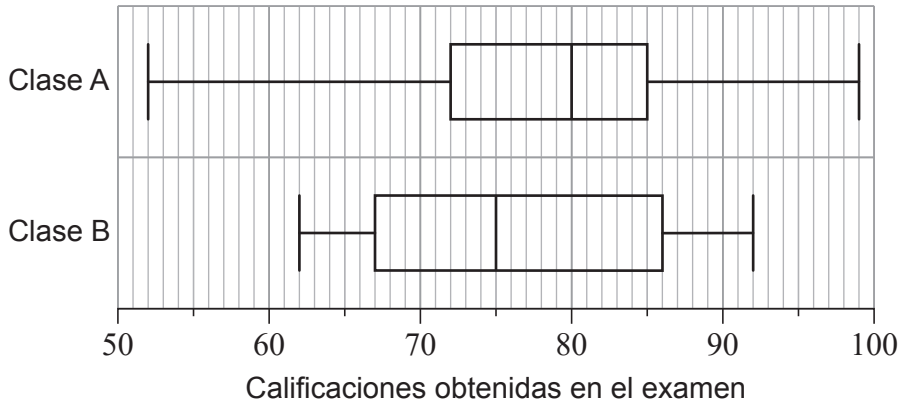
. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

9. [Puntuación máxima: 8]

El Sr. Kelly es profesor de Historia. Después de corregir los exámenes finales, elabora el siguiente diagrama de caja y bigotes para comparar las calificaciones obtenidas en sus dos clases.



(a) Identifique cuales **dos** afirmaciones **tienen que** ser verdaderas, según el diagrama de caja y bigotes. Indique sus opciones poniendo marcas de verificación en la segunda columna de la siguiente tabla. [2]

Enunciado	Verdadero (✓)
Un mayor porcentaje de alumnos de la Clase B obtuvo una calificación inferior a 70 en el examen, que los de la Clase A.	
Los datos de la Clase B siguen una distribución normal.	
Más alumnos de la Clase A obtuvieron una calificación superior a 90 en el examen, que los de la Clase B.	
El rango intercuartil de la Clase A es menor que el rango intercuartil de la Clase B.	

Al final de curso el Sr. Kelly hizo una encuesta, tomando una muestra aleatoria de alumnos de cada una de sus dos clases numerosas, para determinar el grado de satisfacción con su enseñanza.

Cada alumno, de manera independiente, escogió un valor de 1 a 10, donde un 1 significaba que no estaba nada satisfecho y un 10 que estaba muy satisfecho.

A continuación se muestran los datos recogidos entre los alumnos para esta encuesta.

Clase A	6	9	8	10	1	9	10	9	8	4

Clase B	7	5	3	4	3	8	6	7

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 9: continuación)

El Sr. Kelly cree que no hubo ninguna diferencia entre las dos clases en el grado de satisfacción general. Supone que los datos provienen de una población que se puede modelizar mediante una distribución normal y propone realizar una prueba t de Student a un nivel de significación del $5\,\%$.

(b) Escriba para esta prueba la hipótesis nula y la hipótesis alternativa. [2]

(c) Halle el valor del parámetro p correspondiente a esta prueba. [2]

(d) Escriba la conclusión a la que se llega con esta prueba. Dé una razón que justifique su respuesta. [2]

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

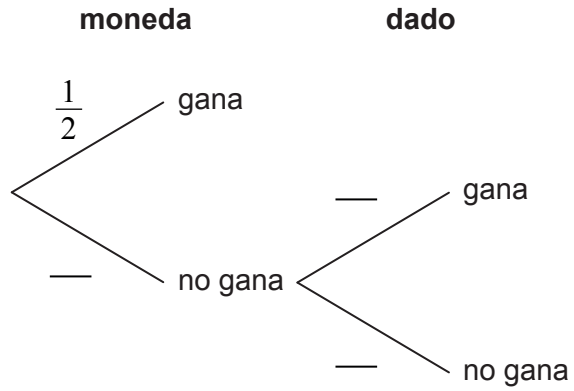
. . . . . .

. . . . . .

10. [Puntuación máxima: 7]

Michèle está jugando a un juego. En ese juego, primero tiene que lanzar una moneda justa y ver si sale cara o cruz. Si sale cara, en ese caso gana el premio. Si sale cruz, aún tiene otra posibilidad de ganar, pero en ese caso tiene que tirar un dado justo de seis caras y sacar un cinco o un seis para poder ganar el premio.

(a) Complete el diagrama de árbol escribiendo las tres probabilidades que faltan. [2]



(b) Halle la probabilidad de que Michèle **no** gane el premio. [2]

(c) Sabiendo que Michèle ganó el premio, halle la probabilidad de que la moneda lanzada haya salido cara. [3]

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

11. [Puntuación máxima: 6]

Toktam trabaja en una panadería local 5 días a la semana. Va al trabajo en un auto antiguo que, cada mañana, tiene una probabilidad de arrancar del $65\,\%$. La probabilidad de que el auto arranque una mañana dada es independiente de que arranque cualquier otra mañana.

(a) Halle la probabilidad de que el auto de Toktam arranque exactamente dos mañanas en una semana laboral de 5 días. [2]

Toktam camina hacia el trabajo en aquellas mañanas que el auto no arranca y **no** está lloviendo. Toktam coge un taxi para ir al trabajo en aquellas mañanas que el auto no arranca y está lloviendo.

Donde vive Toktam, la probabilidad de que llueva una mañana dada es del $45\,\%$ y es independiente de lo que suceda cualquier otra mañana. La probabilidad de que el auto de Toktam arranque es independiente del clima que haya.

(b) Halle la probabilidad de que, en una semana laboral determinada, Toktam **no** tenga que coger un taxi. [4]

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

12. [Puntuación máxima: 6]

Thurston cree que los artistas musicales más populares venden más discos.

Para investigar esta teoría elige al azar ocho artistas musicales y recoge datos del número de seguidores que tiene cada uno de esos artistas en una determinada plataforma de redes sociales. A continuación recoge datos del número de discos que vendió cada artista en la primera semana tras el lanzamiento del disco. Todos esos datos se muestran en la **tabla 1**.

Tabla 1

	Artista 1	**Artista 2**	**Artista 3**	**Artista 4**	**Artista 5**	**Artista 6**	**Artista 7**	**Artista 8**
Número de seguidores en redes sociales (en miles)	11 500	12 400	1300	2300	674	49 500	315	94 400
Número de discos vendidos en la primera semana (en miles)	123	62,4	17,4	94,9	52,5	27	21,6	595,5

Thurston decide calcular el coeficiente de correlación por rangos de Spearman.

(a) Complete la tabla de rangos que se muestra en la **tabla 2**. [1]

Tabla 2

	Artista 1	**Artista 2**	**Artista 3**	**Artista 4**	**Artista 5**	**Artista 6**	**Artista 7**	**Artista 8**
Rango – seguidores en redes sociales	4	3	6	5	7	2	8	1
Rango – discos vendidos en la primera semana								1

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 12: continuación)

(b) Calcule el valor del coeficiente de correlación por rangos de Spearman (r_s). [2]

Thurston cree que los artistas que tienen un mayor número de seguidores en redes sociales venden más discos en la primera semana. Lleva a cabo una prueba de hipótesis a un nivel de significación del $10\,\%$ con la siguiente hipótesis nula:

H_0: En la población, no existe ninguna relación monótona entre el número de seguidores en redes sociales y el número de discos vendidos en la primera semana.

(c) Escriba la hipótesis alternativa de Thurston. [1]

El valor crítico de r_s para este contraste es $0{,}643$.

(d) Dando una respuesta razonada, indique la conclusión de esta prueba de hipótesis. [2]

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Advertencia:

Los contenidos usados en las evaluaciones del IB provienen de fuentes externas auténticas. Las opiniones expresadas en ellos pertenecen a sus autores y/o editores, y no reflejan necesariamente las del IB.

Referencias:

2. Nina Aldin Thune. https://en.wikipedia.org/wiki/Great_Pyramid_of_Giza#/media/File:Kheops-Pyramid.jpg. Bajo licencia CC BY 2.5 https://creativecommons.org/licenses/by/2.5/deed.es. Imagen adaptada.

Los demás textos, gráficos e ilustraciones: © Organización del Bachillerato Internacional, 2023

20EP20